

Après avoir introduit la notion d'impédances complexes, assimilables à des résistances, nous allons développer un outil d'analyse basé sur une analyse graphique du comportement de circuits exploitant une combinaison de plusieurs impédances (résistances et condensateurs en particulier). Chaque circuit mettra en évidence une expression comportementale appelée fonction de transfert. L'analyse de la fonction de transfert sera divisée en deux parties :

- le diagramme de Bode du Module mettant en évidence le rapport entre l'amplitude du signal de sortie et celui du signal d'entrée, selon la fréquence analysée
- le diagramme de Bode en phase, mettant en évidence le déphasage entre le signal de sortie et celui d'entrée, selon la fréquence analysée.

Objectifs de la séance

Rappel : différence essentielle entre diviseur de tension résistif et fonction de transfert

Écriture des fonctions de transfert avec combinaison de termes du premier ordre (Forme canonique)

· Cing termes du premier ordre

$$\underline{H}(j\omega) = K. \frac{j\frac{\omega}{\omega_{Z1}} \cdot \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{Z2}}\right) \cdot \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{Z3}}\right) \dots \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{Zk}}\right)}{j\frac{\omega}{\omega_{P1}} \cdot \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{P2}}\right) \cdot \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{P3}}\right) \dots \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{Pl}}\right)}$$

notation libre, mais doit permettre de différencier les pulsations

• **K** est une constante, ω_{zi} (i=1,k) zéro, ω_{pi} (i=1,l) pôle

Dessiner le module et l'argument de la fonction de transfert :

- Le dessin du module |H(j\omega)| exprimé en dB (décibels) : échelle linéaire.
- Le dessin de l'argument Arg(H(jω)) exprimé en radians ou degrés : échelle linéaire
- Dans les deux cas, l'axe des pulsations est représenté sur une échelle logarithmique.

L'usage des diagrammes de Bode permet de construire de manière très intuitive le comportement fréquentiel des circuits étudiés.

Comme nous le verrons pendant de longues semaines, les fonctions de transfert représentent souvent des produits de termes de bases simples dits du premier ordre. Nous allons répartir ces termes en 5 catégories et les fonctions de transfert étudiées en électronique de base correspondent à une combinaison de ces termes.

Dans ces termes apparaissent des pulsations caractéristiques que nous allons spécialiser.

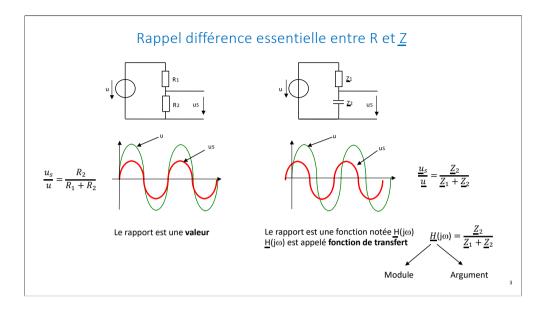
Nous parlerons de pôle, lorsque la pulsation caractéristique se situe dans un terme du dénominateur, et de zéro, lorsque la pulsation caractéristique se situe dans un terme du numérateur.

Le module sera exprimé en décibels (dB) via un calcul logarithmique

L'argument sera exprimé en radians

Dans les deux analyses, les fonctions dépendent des pulsations représentées sur une échelle logarithmique.

On note que les termes de bases sont individuellement très faciles à dessiner qu'il s'agisse de leur module ou de leur argument. Ces dessins de base sont linéaires sur des intervalles définis par les pulsations caractéristiques. En combinant les allures des termes de base apparaissant dans la fonction de transfert, il sera très simple de dessiner le module et l'argument de celle-ci.



La fonction de transfert la plus simple que nous puissions imaginer est le diviseur résistif, réalisé uniquement avec deux résistances. Quelle que soit la fréquence analysée, le rapport entre l'amplitude du signal de sortie et celle du signal d'entrée, est constante. D'autre part, il n'y a pas de décalage entre les deux signaux. Dans le cas où l'une des résistances est substituée par un condensateur, on remarque que l'amplitude varie en fonction de la fréquence, au même titre que la résistance de sortie.

Conséquence pour représenter des produits de termes de base

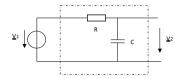
- 1. Les fonctions de transfert s'expriment à partir d'un produit de termes de bases
- 2. Exploitation d'une échelle logarithmique pour l'axe des modules : Log(A.B) = Log (A) + Log (B)
 - Si A et B sont complexes: |A.B| = |A|.|B| et Log(|A.B|) = Log |A| + Log |B|
- 3. Quels sont les termes de bases du premier ordre et pourquoi les modules calculés en dB?

$$\begin{aligned} |K|_{dB} &= 20.\log(K) \\ \left|j\frac{\omega}{\omega_{z1}}\right|_{dB} &= 20.\log\left|j\frac{\omega}{\omega_{z1}}\right| = 20.\log\left(\frac{\omega}{\omega_{z1}}\right) \\ \left|1+j\frac{\omega}{\omega_{z2}}\right|_{dB} &= 20.\log\left|1+j\frac{\omega}{\omega_{z2}}\right| = 20.\log\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_{z2}}\right)^2} \\ \frac{1}{\left|j\frac{\omega}{\omega_{P1}}\right|_{dB}} &= 20.\log\frac{1}{\left|j\frac{\omega}{\omega_{P1}}\right|} = 20.\log\left(\frac{\omega}{\omega_{P1}}\right) \end{aligned} \qquad \qquad \\ \log en \ base \ 10 \end{aligned}$$

Les deux termes impliqués dans un produit peuvent être complexes. L'analyse d'une expression complexe doit se traduire par les calculs du module et de l'argument. Dans le cas précis du calcul du module, nous savons que le module d'un produit est égal au produit des modules. Via un calcul logarithmique, il suffira de sommer les valeurs obtenues pour les différents modules.

A noter que nous utiliserons la notion de dB issue d'un rapport de puissance. On retrouve cette notion dans plusieurs disciplines, en particulier en acoustique. Le dB s'exprime sous la forme $10.\text{Log}(P_2/P_1)$ ce qui permet d'avoir une bonne représentation graphique. Dans les formules à venir nous exploiterons plutôt $20.\text{Log}(U_2/U_1)$. Pourquoi passer de 10 à 20? Le développement analytique proposé dans la dia montre que P s'exprime sous la forme U^2/R . Extraire le carré du Log, revient à multiplier le Log par $2 \cdot \text{Logx}^2 = 2.\text{Logx}$), ce qui justifie le facteur 20 et non pas 10 habituel.

L'exemple le plus simple: Réponse en fréquence du circuit "passe-bas"



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \quad \text{Avec } \omega_0 = 1/RC = 1/\tau$$

Module:

$$\left| \underline{H}(j\omega) \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

Argument:

$$\operatorname{Arg}\left(\underline{H}(j\omega)\right) = -\operatorname{arct}g\frac{\omega}{\omega_0}$$

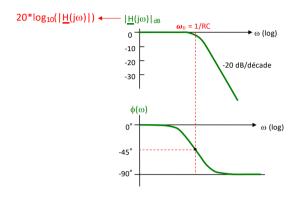
Pour illustrer l'exploitation des échelles logarithmiques, nous allons analyser les filtres du cours précédent, à savoir, le filtre passe-bas et le filtre passe-haut.

Pour rappel, le filtre passe-bas donne une fonction de transfert dont l'étude permet d'extraire le module et l'argument. A noter que le produit RC correspond à un pulsation particulièrement importante et que l'on appellera pulsation caractéristique ($\omega_0 = 1/RC$)

Comment dessiner ce comportement ? La méthode la plus longue, mais la plus sure, consiste à dessiner un nombre élevé de points qui traduit correctement son allure (voir ultérieurement).

Réponse en fréquence du filtre passe-bas

Recherche des asymptotes et cas particulier

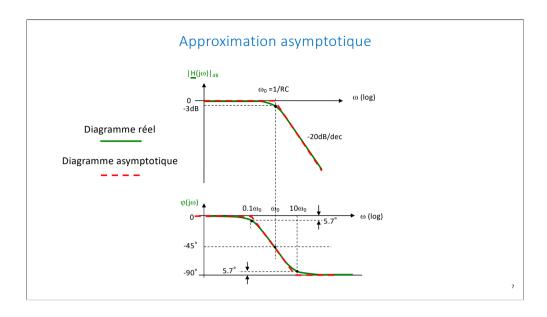


Les allures du module et de l'argument montrent des caractéristiques très prononcées.

Dans le cas du module, entre les très basses fréquences et la pulsation de coupure, l'évolution est très lente. Vers la pulsation de coupure et jusqu'aux hautes fréquences, la pente s'accélère violemment.

Dans le cas de l'argument, nous voyons que dans les basses fréquences le déphasage est très faible. Il s'accélère vers la pulsation de coupure et un peu au-delà avant de se stabiliser à 90°.

Nous verrons qu'il est assez simple de travailler, non pas avec les courbes réelles, mais avec des courbes asymptotiques qui approximent correctement la réalité.

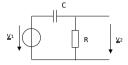


Nous voyons avec le module que deux asymptotes (en rouge) approximent correctement la courbe réelle. L'erreur maximale sera obtenue à la pulsation caractéristique. L'axe vertical exprimé en dB (20 log du module), cette erreur représente – 3dB.

Avec l'argument, nous avons en fait trois asymptotes.

Une asymptote horizontale pour les basses fréquences jusqu'à 0.1 ω_0 , une autre asymptote horizontale entre $10\omega_0$ et les hautes fréquences. Et les deux asymptotes sont reliées par une pente à de $\pi/2$ pour deux décades. On note qu'à la pulsation caractéristique, le déphasage est de -45°.

Circuit RC passe-haut



$$\underline{\underline{H}}(j\omega) = \underline{\frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1}} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

Module:

$$\left| \underline{H}(j\omega) \right| = \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

Argument:
$$\operatorname{Arg}\left(\underline{H}(j\omega)\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\omega}{\omega_0}$$

Autre représentation que l'on trouve dans la littérature (difficile à exploiter)

Module:

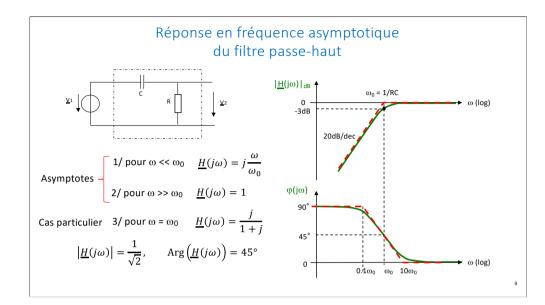
$$\left| \underline{H}(j\omega) \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

Argument:

$$\operatorname{Arg}\left(\underline{H}(j\omega)\right) = \operatorname{arct} g \frac{\omega_0}{\omega}$$

Pour le filtre passe-haut, on obtient aussi une fonction de transfert et une pulsation caractéristique ($\omega_0 = 1/RC$).

De cette fonction de transfert nous pouvons déduire l'allure du module et de l'argument.



Comme pour le filtre passe-bas, le filtre passe-haut pourrait être étudié de manière complète (courbe réelle) ou approximative avec les asymptotes. Nous obtenons respectivement deux courbes aux caractéristiques similaires du cas précédent.

Diagramme de Bode - Module

Propriété : Le module d'un produit est égal au produit des modules,

or, le log d'un produit est égal à une somme de log

 $Si \underline{H}(j\omega) = \underline{H}_1(j\omega) \cdot \underline{H}_2(j\omega)$ Alors $|\underline{H}(j\omega)|_{dB} = |\underline{H}_1(j\omega)|_{dB} + |\underline{H}_2(j\omega)|_{dB}$

D'où, l'intérêt de mettre une fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ sous la forme:

$$\underline{\underline{H}}(j\omega) = K \cdot \frac{j\frac{\omega}{\omega_{Z1}} \cdot \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{Z2}}\right) \cdot \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{Z3}}\right) \dots \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{Zk}}\right)}{j\frac{\omega}{\omega_{P1}} \cdot \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{P2}}\right) \cdot \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{P3}}\right) \dots \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{Pl}}\right)}$$

Son module exprimé en dB s'exprime comme une somme de modules élémentaires exprimés eux aussi en dB:

$$\left|\underline{H}(j\omega)\right|_{dB} = |K|_{dB} + \left|j\frac{\omega}{\omega_{Z1}}\right|_{dB} + \left|1+j\frac{\omega}{\omega_{Z2}}\right|_{dB} + \dots + \left|1+j\frac{\omega}{\omega_{Zl}}\right|_{dB} + \left|\frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_{P1}}}\right|_{dB} + \dots + \left|\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_{Pl}}}\right|_{dB}$$

BUT : faciliter le tracé du diagramme de Bode

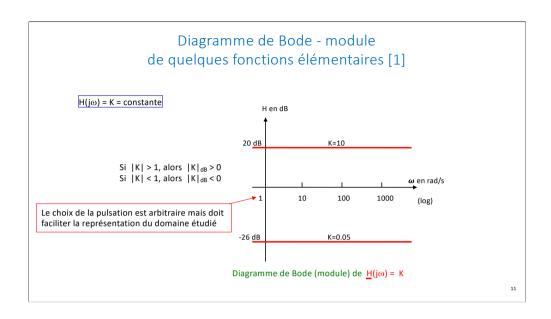
1

Quelques propriétés intéressantes peuvent être exploitées des échelles logarithmiques.

Dans le cas du module, s'agissant d'un produit et d'un rapport de termes, on pourra exécuter les calculs suivants :

- Le module d'un produit est égal au produit des modules
- Le module d'un rapport est égal au rapport des modules.

Le dessin du module complet sera alors grandement facilité, car nous verrons que les modules de chaque terme de base donnent des allures très simples.



Le premier des cinq termes de base correspond à une constante.

Compte tenu de l'échelle logarithmique du module, si la constante est supérieure à 1, on dira que le module est positif en décibels, et négatif en décibels dans le cas contraire.

Diagramme de Bode - module

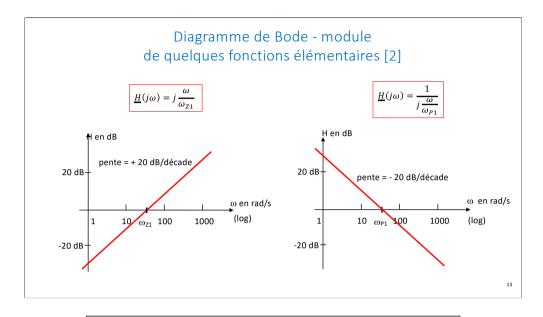
Exemples de calcul pour quelques constantes:

$$|\underline{H}(j\omega)|_{dB} = 20.\log |\underline{H}(j\omega)|$$

$ \underline{H}(j\omega) = 10$ $ \underline{H}(j\omega) _{dB} = 20 \text{ dB}$
$ \underline{H}(j\omega) = 100$ $ \underline{H}(j\omega) _{dB} = 40 \text{ dB}$
$ \underline{H}(j\omega) = 1000$ $ \underline{H}(j\omega) _{dB} = 60 \text{ dB}$
$ \underline{H}(j\omega) = 0.1$ $ \underline{H}(j\omega) _{dB} = -20 \text{ dB}$
$ \underline{H}(j\omega) = 0.01$ $ \underline{H}(j\omega) _{dB} = -40 \text{ dB}$
$ \underline{H}(j\omega) = 0.001$ $ \underline{H}(j\omega) _{dB} = -60 \text{ dB}$
$ \underline{\mathbf{H}}(\mathrm{j}\omega) = 2$ $ \underline{\mathbf{H}}(\mathrm{j}\omega) _{dB} = 6 \; dB$
$ \underline{H}(j\omega) = 0.5$ $ \underline{H}(j\omega) _{dB} = -6 \text{ dB}$

La dia propose l'évaluation de quelques valeurs constantes particulières et très utiles par la suite..

12



Remarque importante: Travailler avec a.log(X) sur une échelle logarithmique revient à travailler avec a.X sur une échelle linéaire. En d'autres termes, nous pouvons représenter chaque dessin de manière linéaire, ce qui simplifiera significativement la représentation globale (somme de dessins linéaires).

Le second terme est un imaginaire pur et donne une pente constante sur toute l'échelle des pulsations. La pente est de +20~dB par décade. Cette pente coupe l'axe des 0~dB à la pulsation caractéristique ω_0 .

Pour les pulsations inférieures à la pulsation caractéristique le terme atténue le signal d'entrée, alors qu'il l'amplifie pour les pulsations supérieures.

Le troisième terme est aussi un imaginaire pur symétrique du second. Il donne une pente constante de -20 dB par décade sur toute l'échelle des pulsations. Cette pente coupe aussi l'axe des 0 dB à la pulsation caractéristique $\omega_0.$

Pour les pulsations supérieures à la pulsation caractéristique le terme atténue le signal d'entrée, alors qu'il l'amplifie pour les pulsations inférieures.

Diagramme de Bode - module de quelques fonctions élémentaires [3]

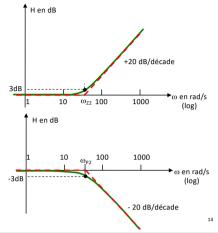
$$\underline{H}(j\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_{Z2}} et |\underline{H}(j\omega)| = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{Z2}}\right)^2}$$

- Comportement à basses fréquences identique à une constante de valeur 1 soit |H| = 0 dB
- Comportement à hautes fréquences identique au terme $j \frac{\omega}{\omega_{Z2}}$ soit |H| = 20 dB/dec

$$\underline{\underline{H}}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_{P2}}} et |\underline{\underline{H}}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{P2}}\right)^2}}$$

- Comportement à basses fréquences identique à une constante de valeur 1 soit | H | = 0 dB
- Comportement à hautes fréquences identique au terme $\frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_p}}$

soit $|H| = -20 \, dB/dec$



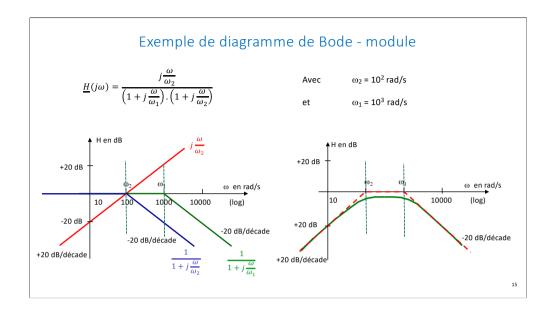
Le quatrième terme ressemble au second, mais présente une information supplémentaire +1 Ce terme a donc une partie réelle et une partie imaginaire.

Le calcul du module est un peu plus " complexe ". Il met en évidence 2 asymptotes :

- Une asymptote horizontale entre les basses pulsations et la pulsation caractéristique. En effet, aux basses fréquences ω << ω21, le terme ω/ω21 est négligeable devant 1. Le comportement en basses fréquences est comparable au terme constant
- Une asymptote à +20 dB/Dec pour les pulsations supérieures à la pulsation caractéristique.
 Dans les hautes pulsations, on peut considérer que le terme réel "1" est négligeable devant le terme imaginaire, auquel cas, l'analyse redevient comparable au second terme étudié (jω/ωz).

Nous pouvons comparer l'allure asymptotique et la courbe réelle. Les asymptotes sont approximent bien la réalité, car l'erreur maximale est obtenue lorsque nous sommes à la pulsation caractéristique et vaut + 3 dB.

Le cinquième terme est le symétrique du quatrième au même titre que le troisième vis à vis du second. Nous pouvons alors sans difficulté dessiner son allure et mettre en évidence l'erreur maximale de –3dB à la pulsation caractéristique.



Dans cet exemple nous proposons une fonction de transfert qui met en évidence trois termes de base, chaque terme ayant une allure propre et une pulsation caractéristique propre.

Le dessin de chaque terme étant très simple, le dessin global demande très peu de travail. Nous obtenons alors un diagramme de Bode complet qui approxime bien la réalité.

Diagramme de Bode - argument ou phase

La phase $Arg(H(j\omega))$ est exprimée en radians à 2π près

Propriété : l'argument d'un produit est égal à la somme des arguments $Si \underline{H}(j\omega) = \underline{H}_1(j\omega) \cdot \underline{H}_2(j\omega) \text{ Alors } Arg(\underline{H}(j\omega)) = Arg(\underline{H}_1(j\omega)) + Arg(\underline{H}_2(j\omega))$

$$\underline{H}(j\omega) = K \cdot \frac{j\frac{\omega}{\omega_{Z1}} \cdot \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{Z2}}\right) \cdot \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{Z3}}\right) \dots \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{Zk}}\right)}{j\frac{\omega}{\omega_{P1}} \cdot \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{P2}}\right) \cdot \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{P3}}\right) \dots \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{Pl}}\right)}$$

Son argument s'exprime comme une somme (différence) d'arguments élémentaires:

$$\begin{split} Arg\left(\underline{H}(j\omega)\right) &= Arg(K) + Arg\left(j\frac{\omega}{\omega_{Z1}}\right) + Arg\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{Z2}}\right) + \cdots Arg\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{Zk}}\right) \\ &- Arg\left(j\frac{\omega}{\omega_{P1}}\right) - Arg\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{P2}}\right) \ldots - Arg\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{Pl}}\right) \end{split}$$

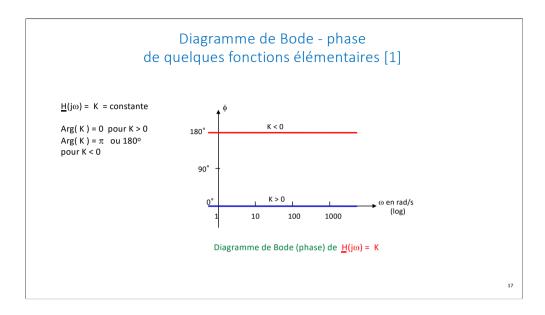
on ue

Pour le diagramme de Bode de l'argument (calcul du déphasage), on notera quelques propriétés supplémentaires toujours liées au fait que la fonction de transfert s'exprime sous la forme de produits et de rapports de termes basiques.

On pourra alors exécuter les calculs suivants :

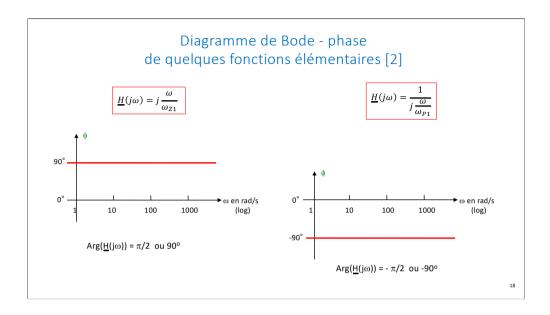
- L'argument d'un produit est égal à la somme des arguments,
- L'argument d'un rapport est égal à la différence des arguments.

Comme précédemment, le dessin du module complet sera aussi facilité.



Pour les termes constants, selon qu'ils sont positifs ou négatifs, l'argument donne deux déphasages possible 0 ou π .

On note que pour les modules, le signe n'intervenait pas, seule la valeur absolue nous intéressait.



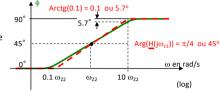
Le second terme nous donne un déphasage constant de $90^\circ\,$. En effet c'est un imaginaire pur. La partie réelle n'existant pas, l'arctg(Y/0) vaut toujours $90^\circ\,$.

Comme pour les modules, le troisième terme est le symétrique du second. Cela se traduit par un déphasage constant de -90° .

Diagramme de Bode - phase de quelques fonctions élémentaires [3]

$$\underline{H}(j\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_{Z2}}$$

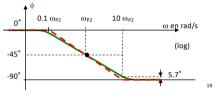
- Comportement à basses fréquences identique à une constante de valeur 1 soit φ=0
- Comportement à hautes fréquences identique au terme j ω/ωz₂ soit φ=π/2



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_{P2}}}$$

- Comportement à basses fréquences identique à une constante de valeur 1 soit φ=0
- Comportement à hautes fréquences identique au terme

dentique au terme $\frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_{P2}}}$



soit $\phi = -\pi/2$

Le quatrième terme met en évidence une valeur réelle et une valeur imaginaire.

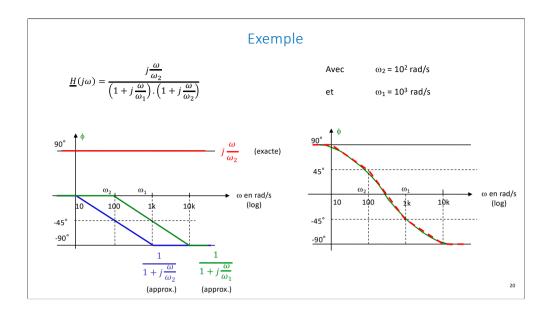
L'allure qui lui sera associée se décompose en trois zones.

- la zone des basses pulsations à 0.1ω_{Z1} donne un déphasage nul
- la zone des pulsations allant de 10 ω_{Z1} aux hautes pulsations donne un déphasage de 90°.
- La zone intermédiaire rejoint les deux asymptotes et à la pulsation caractéristique nous mettons en évidence 45° de déphasage.

Si nous comparons la courbe réelle et la courbe asymptotique, nous mettons aussi en évidence une erreur maximale qui vaut 5° 7 et se situe aux deux pulsations $0.1\omega_{Z1}$ et $10~\omega_{Z1}$.

Le cinquième terme est le symétrique du quatrième comme c'était le cas pour le module. Nous reconnaissons les trois zones (asymptote à -90° pour la troisième) et –45° à la pulsation caractéristique.

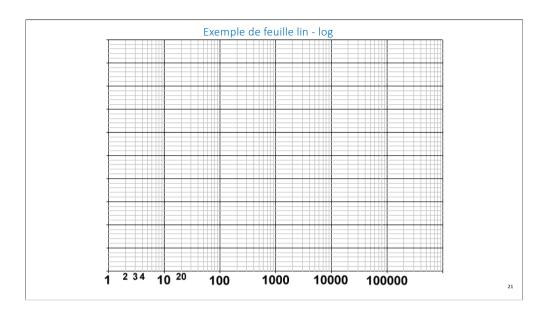
Comme précédemment, l'erreur maximale est de 5° 7 en valeur absolue aux deux pulsations $0.1\omega_{P1}$ et $10~\omega_{P1}$.



Nous reprenons la même fonction de transfert du diagramme de Bode en module.

Comme précédemment, chaque terme ayant une allure propre.

Le dessin de chaque terme est à peine plus complexe, le dessin global demande un peu plus de subtilité. Nous obtenons alors un diagramme de Bode complet qui approxime toujours aussi bien la réalité.



La feuille proposée est constituée de 6 décades. Il existe d'autres formats.

Remarques : La fréquence basse est arbitraire (ici 1 Hz), Elle doit être proposée pour faciliter le dessin. Par exemple, si l'on travaille dans le domaine de l'audio, les fréquences utiles se répartissent sur 3 décades (de 20 Hz à 20 kHz), qu'il faudrait centrer pour une présentation confortable. Dans ce cas, la fréquence la plus basse représentée valant 1 Hz se justifie.